Abbiamo visto che

$$L = H \oplus \Sigma$$

dove $h_i \in H$ t.c. $[h_i, h_j] = 0 \quad \forall i, j$

e $\quad Ad\left(h = \sum_i c_i h_i\right) e_\alpha = \alpha(h)\, e_\alpha$

i generatori di Σ sono autovettori di $Ad\, h$ con autovalori linearmente dipendenti da h dette radici di L

- UNA PROPRIETÀ DELLA FORMA DI KILLING

$$(a, [b,c]) = ([a,b], c)$$

$$(a, [b,c]) = Tr\left(Ad\, a \; Ad\, [b,c]\right)$$

$$\mathrm{Ad}[b,c]w = [[b,c],w] = -[[w,b],c] - [[c,w],b]$$

$$= -[c,[b,w]] + [b,[c,w]]$$

$$= [\mathrm{Ad}\,b, \mathrm{Ad}\,c]\,w$$

$$= T_2(\mathrm{Ad}\,a\,[\mathrm{Ad}\,b, \mathrm{Ad}\,c])$$

$$= T_2(\tilde{a}\,[\tilde{b},\tilde{c}]) \qquad \tilde{k} := \mathrm{Ad}\,k$$

$$T_2(\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} - \tilde{a}\tilde{c}\tilde{b}) = T_2(\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}) - \underbrace{T_2(\tilde{a}\tilde{c}\tilde{b})}_{T_2(\tilde{b}\tilde{a}\tilde{c})}$$

$$= T_2([\tilde{a},\tilde{b}]\,\tilde{c}) = T_2(\mathrm{Ad}\,[a,b]\,\mathrm{Ad}\,c)$$

$$= ([a,b],c)$$

$\blacksquare$

con questa proprietà possiamo calcolare

$$\left(h, [e_\alpha, e_{-\alpha}]\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Ad}\,h\ \mathrm{Ad}\,[e_\alpha, e_{-\alpha}]\right) =: \left\langle \mathrm{Ad}\,h\ \mathrm{Ad}\,[e_\alpha, e_{-\alpha}] \right\rangle$$

$$= \left([h, e_\alpha], e_{-\alpha} \right) = \alpha(h)\,\left(e_\alpha, e_{-\alpha}\right)$$

$$\left(h, [e_\alpha, e_{-\alpha}]\right) = \alpha(h)\left(e_\alpha, e_{-\alpha}\right)$$

cioè $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha \left(e_\alpha, e_{-\alpha}\right)$

$$\Downarrow$$

$$h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \cdot c_\alpha \qquad c_\alpha = \frac{1}{(e_\alpha, e_{-\alpha})}$$

Dato un numero quantico posso introdurre degli operatori a

Scala T_+ e T_- che sono e_α, $e_{-\alpha}$ e dal loro commutatore trovo un elemento della sub-algebra di Cartan H

Se ho più numeri quantici posso avere $[e_\alpha, e_\beta]$ $\beta \neq \alpha, -\alpha$

Posso vedere cosa è $[e_\alpha, e_\beta]$ studiandone la composizione

$$\mathrm{Ad}\, h\, [e_\alpha, e_\beta] = \left[h, [e_\alpha, e_\beta]\right] =$$

Jacobi
$$= -\left[e_\alpha, \underbrace{[e_\beta, h]}_{-\beta(h)\, e_\beta}\right] - \left[e_\beta, \underbrace{[h, e_\alpha]}_{\alpha(h)\, e_\alpha}\right]$$

$$= \beta(h)\, [e_\alpha, e_\beta] - \alpha(h)\, [e_\beta, e_\alpha] = \alpha(h) + \beta(h)\, [e_\alpha, e_\beta]$$

$[e_\alpha, e_\beta]$ è un autovettore di $\mathrm{Ad}\, h$ con autovalore $\alpha(h) + \beta(h)$ ovvero è una radice $\alpha + \beta$

se $\beta = -\alpha$ ritorno quanto detto sopra $Ad\, h\, [e_\alpha, e_{-\alpha}] = 0$

cioè $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \in H$

$$[h_1, h_2] = 0 \qquad h_1, h_2 \in H$$

$$[h_\beta, e_\alpha] = \alpha(h_\beta)\, e_\alpha = (h_\beta, h_\alpha) \cdot e_\alpha$$

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h)\, e_\alpha$$

$$[h_\alpha, e_{\pm\alpha}] = (h_\alpha, \pm h_\alpha)\, e_\alpha = \pm\langle \alpha, \alpha \rangle\, e_\alpha$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} c_{\alpha\beta}\, e_{\alpha+\beta} \quad C_{\alpha\beta}\ \text{TBD} & \alpha+\beta \neq 0 \\ h_\alpha\, (e_\alpha, e_{-\alpha}) & \alpha+\beta = 0 \end{cases}$$

ogni numero quantico ho un $SU(2)$ associato e $[e_\alpha, e_\beta]$ ci dice come sono collegati. In genere ci sono $h_\alpha \propto [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ associati a questi $SU(2)$ ma possono essere ridondanti

SU(2)

SU(3)